Prof. Dr. Alfred Toth

Wissenschaft als Invariantentheorie von Gegenständlichkeit

1. Es ist zwar kein Geheimnis unter den Schülern Max Benses, aber dennoch immer aufs Neue überraschend, welche Fülle von Erkenntnissen sich bereits im Jugendwerk Benses findet, die dieser erst Jahrzehnte später in seinem semiotischen Hauptwerk in ein konsistentes System eingebaut hat. Im folgenden geht es um die Bestimmung von Wissenschaft als Invariantentheorie relativ zu der von einer bestimmten Wissenschaft thematisierten Gegenständlichkeit, d.h. um eine sehr allgemeine Form dessen, was Bense (1979, S. 29) operativ als "Mitführung" ontischer Objekte in semiotischen Zeichen definiert hatte. Die folgenden Zitate aus Benses vierzig Jahre zuvor veröffentlichtem Buch "Geist der Mathematik" sind so ausgewählt und angeordnet worden, daß deutlich wird, wie Bense die mathematischen Begriffe der Invariante, der Gruppe und der Isomorphie in dieser Reihenfolge voneinander herleitet.

1.1. Invariante

"Hält man nun die Tatsache fest, daß eine Wissenschaft stets einige Grundsätze aufweist, durch die ihr Gegenstand festgelegt wird, dann ergibt sich, wie leicht einzusehen, die Formulierung: Eine Wissenschaft ist die Invariantentheorie einer Gegenständlichkeit" (Bense 1939, S. 79).

"Zum Beispiel gibt es gewisse grundlegende Erfahrungssätze, in denen das Bestehen verschiedener Stoffe in der Natur behauptet wird. Alles was sich auf diese Erfahrungssätze bezieht, was theoretisch und experimentell aus diesen grundlegenden Sätzen abgeleitet werden kann, läßt die die Wissenschaft inaugurierende Urgegebenheit unverändert, invariant" (Bense 1939, S. 80).

1.2. Gruppe

"Ist jedem Element einer Gruppe G ein und nur ein Element einer zweiten Gruppe G' zugeordnet, dergestalt, daß dem Produkt, d.h. also der Verknüpfung zweier Elemente von G das Produkt (Verknüpfung) der zugeordneten Elemente von G' zugeordnet ist, so heißt die Gruppe G' isomorph der Gruppe G " (Bense 1939, S. 81).

1.3. Isomorphie

"Solche Isomorphie bedeutet offenbar nichts anderes als eine exakte Analogie" (Bense 1939, S. 81).

"Man kann den Unterschied zwischen Analogie und Isomorphie rein graduell verstehen und sagen: Was die Analogie in der natürlichen Sprache, bedeutet die Isomorphie in den sogenannten künstlichen Sprachen, d.h. in den mehr oder weniger mathematisierten bzw. kalkülisierten Zeichensprachen" (Bense 1939, S. 82).

"Bis in metaphysische Bezirke der Erkenntnis ragt die Wirkung der Isomorphienbildung. Denn die Einführung des unerkennbaren Dinges an sich gegenüber der erkennbaren Erscheinung geht durchaus auf eine Isomorphie von Ding an sich und Erscheinung zurück. Das Interessante hierbei ist darüber hinaus noch folgendes, wenn zwischen den Reihe der Dinge an sich und der Reihe der Erscheinungen wirklich eine echte Isomorphie besteht, dann ist es gar nicht mehr nötig, das einzelne Ding an sich ergründen zu wollen. Man könnte auf Grund der Kenntnis der Gruppe der Erscheinungen ohne weiteres auf die Ordnung der Dinge an sich schließen, man sagte etwas über das Reich des erkenntnismäßig Unzugänglichen aus, ohne im wirklichen Sinn zu erkennen. Das Problem des Verhältnisses von Ding an sich und Ding als Erscheinung beruht also auf dem im Bereich des menschlichen Ausdrucks viel allgemeineren Problems zwischen Form und Inhalt, zweier Phänomene, zwischen denen ja sicher Isomorphie besteht" (Bense 1939, S. 83).

2. Die im letzten Satz von Bense als ein Axiom formulierte Zeichen-Objekt-Isomorphie tritt in Benses erstem spezifisch semiotischen Buch in der Form der Definition eines Zeichens als "Metaobjekt" wieder auf (Bense 1967, S. 9). Formal stellen Zeichen allerdings Abstraktionsklassen von Objekten dar (vgl. Klaus 1965, S. 31 ff.), d.h. man kann definieren

$$Z = \{\Omega\}.$$

Dies führt also dazu, daß sich die Isomorphie zwischen Zeichen und Objekten durch Korrespondenzen verschiedener Einbettungsstufen äußert. Unter Be-

nutzung des Satzes von Wiener und Kuratowski können wir somit folgende Hierarchie ontisch-semiotischer Isomorphie konstruieren (vgl. Toth 2015)

$$0 := \emptyset = \Omega$$

$$1 := \{\emptyset\} = \{0\} = \{\Omega\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} = \{\{\Omega\}\}$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\{\Omega\}\}\}.$$

Die wohl bedeutendste Folgerung daraus ist, daß die von Bense (1979, S. 53 u. 67) eingeführte Definition des Zeichens als einer "Relation über Relationen", die man durch

$$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

kategoriethoretisch redefinieren kann, in ihrer inklusiven, selbsteinbettenden Ordnung, welche das Fundierungsaxiom der klassischen Mengentheorie außer Kraft setzt, gleichzeitig die abstrakte Struktur einer Objektdefinition ist. Damit erhalten wir auf direktem Wege die Isomorphien

$$3 = R(0, 1, 2) \cong$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = R(\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \cong$$

$$\{\{\{\Omega\}\}\} = R(\Omega, \{\Omega\}, \{\{\Omega\}\}),$$

die man für die einzelnen Relata wie folgt übersichtlich darstellen kann

3	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$\{\{\{\Omega\}\}\}$
0	$\emptyset$	Ω
1	$\{\emptyset\}$	$\{\Omega\}$.
2	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\Omega\}\}$.

Wegen $Z = \{\Omega\}$ ergibt sich also ontisch-semiotische Isomorphie der letzteren Korrespondenztabelle mit der folgenden

3	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$\{\{Z\}\}$
0	$\emptyset$	Ω
1	$\{\emptyset\}$	Z
2	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{Z\}$.

Literatur

Bense, Max, Geist der Mathematik. München und Berlin 1939

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Klaus, Georg, Spezielle Erkenntnistheorie. Berlin (DDR) 1965

Toth, Alfred, Zahlentheoretische Systemdefinition und ontisch-semiotische Isomorphie. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

20.6.2015